BAC 1997 SESSION DE CONTROLE

EXERCICE 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = xe^{\frac{1-x}{2}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)a- Dresser le tableau de variation de f .

b- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

c- Tracer (C).

d- Montrer que, pour tout réel x de [0,1], on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.

2) On pose, pour tout n de IN*, $I_n = \frac{1}{n!2^{n+1}} \int_0^1 x^n e^{\frac{1-x}{2}} dx$ et

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \ldots + \frac{1}{n!2^n}.$$

a- Donner la valeur de I_1 et montrer que, pour tout n de IN*, on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!2^{n+1}}.$$

b- Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in IN^*$, on a : $u_n = \sqrt{e} - I_n$.

c- Montrer que, pour tout n de IN*, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n(n!)2^{n+1}}$.

d- En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 (4 points)

On considère une pièce de monnaie truquée de sorte que la probabilité d'avoir "Face" soit égale à $\frac{2}{5}$.

1) On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.

a - Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Pile".

b - Calculer la probabilité d'avoir deux fois "Face".

c - Calculer la probabilité d'avoir exactement une fois "Face".

2) On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.

L'urne U_1 contient quatre boules blanches et deux boules noires.

L'urne U_2 contient trois boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_3 contient deux boules blanches et quatre boules noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve (E) suivante :

On lance la pièce de monnaie deux fois de suite.

Si on obtient deux fois "Pile", on tire simultanément trois boules de U_1.